КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Явные и неявные конечно-разностные схемы

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

ЯВНЫЕ СХЕМЫ

Рассмотренная в предыдущих лекциях КРС с разностями вперед по времени и с центр. разностями по пространственной переменной является **явной**, т.к. значение искомой функции в определенной момент времени явно выражается через значения решения в предыдущий момент времени.

Как было показано, для того, чтобы явная КРС была устойчивой, необходимо наложить определенные ограничения на размеры ячейки сетки, т.е. на шаги Δx и Δt.

Рассмотрим конкретную задачу, для корректной постановки которой необходимо кроме данного уравнения задать граничные условия.

Пусть необходимо определить распределение температуры среды в трубе, движущейся с постоянной скоростью *u.* Начальная температура среды T_0 , на концах трубы - T_1 и T_2 соответственно .

Математически эта задача формулируется следующем образом:

$$\frac{df}{dt} + u\frac{df}{dt} = a\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$t=0,$	$0<x<l:$	$f=f_0;$
$t\geq 0,$	$x=0:$	$f=f_1;$
	$x=l:$	$f=f_2$

В конечно-разностном виде эта задача запишется следующем образом:

$$\frac{f^{n+1}{}_i - f^n{}_i}{\Delta t} + u\frac{f^n{}_{i+1} - f^n{}_{i-1}}{2\Delta x} = a\frac{f^n{}_{i+1} + f^n{}_{i-1} - 2f^n{}_i}{\Delta x^2}$$

$T_{i,1}=T_0$, *i=2, L-1*
$T_{1,n}=T_1$, *n=1,2,…*
$T_{L,n}=T_2$, *n=1,2,…*

Необходимо оценить величину шагов *Δx* и *Δt*.

1) Ограничение для шага *Δx* для этой схемы имеет вид, $\Delta x \le \frac{2a}{u}$

Пусть $u=0{,}1$ м/с (т.к. течение ламинарное) $a=2\cdot 10^{-5}$ (для воздуха).

$$\Delta x \le \frac{2\cdot 2\cdot 10^{-5}}{10^{-1}} = 4\cdot 10^{-4}(м) = 0{,}4мм$$

Пусть $\Delta x=4\cdot 10^{-4}$ *м* (по максимуму)

Если шаг по *x* выберем равномерным, то общее число шагов по *x* (если *l=1 м*)

$$L = \frac{l}{\Delta x} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^4}{4} = 2500$$

2) $$\Delta t \le \frac{\Delta x}{u}$$ (из условии Куранта: c≤ 1)

$$\Delta t \le \frac{4 \cdot 10^{-4}}{10^{-1}} = 4 \cdot 10^{-3} \quad (c) = 4 \text{ мс}$$

Если *Δt* также равномерен, то общее число шагов по времени (при максимальном *Δt*):

t=1с: $$N = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = 250$$

t=10 с: $$N = \frac{10}{4 \cdot 10^{-3}} = 2500$$

Т.о. отношение шагов $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ пропорционально *u,* чем больше *u* , тем меньше $\frac{\Delta t}{\Delta x}$

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО ЯВНОЙ СХЕМЕ

1) Выразим явно значение $f_{i,n+1}$ из конечно-разностного уравнения:

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}\right)$$

$$i = 2, L-1$$

$$n = 2,3,4,\ldots$$

или $$f_{i,n+1} = f_{i,n} - \frac{c}{2}\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right) + d\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}\right)$$

2) *n=1*, $i = 2, L-1$ $f_{i,1}=f_0$ - заданы значения во всех узлах $n = 1$

3) *i=1, n=1,2,…* $f_{1,n}=f_1$ - заданы значения во всех узлах *i=1*

4) *i=L, n=1,2,…* $f_{L,n}=f_2$ - заданы значения во всех узлах *i=L*

Т.о. заданы значения во всех граничных узлах.

5) Значение искомой функции в узлах на следующем временном слое получается из конечно-разностной формулы следующем образом:

$$f_{2,2} = f_{2,1} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{3,1} - f_{1,1}\right) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{3,1} + f_{1,1} - 2f_{2,1}\right)$$

$$f_{3,2} = f_{3,1} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{4,1} - f_{2,1}\right) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{4,1} + f_{2,1} - 2f_{3,1}\right)$$

$$f_{L-1,2} = f_{L-1,1} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{L,1} - f_{L-2,1}\right) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{L,1} - f_{L-2,1} - 2f_{L-1,1}\right)$$

Т.о. получено решение на следующем временном слое *n=2.* Затем находится решение для *n=3* и т.д. до тех пор, пока не получим необходимое значение *t*.

ЯВНАЯ СХЕМА "ЧЕХАРДА"

Применительно к используемому нами модельному уравнению эта схема имеет следующий вид: Произвольно по времени заменяется центральными разностями, а в конечно разностной аппроксимации второе произвольное значение $f_{i,n}$ заменяется средним арифметическим $f_{i,n+1}$ и $f_{i,n-1}$

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n-1}}{2\Delta t} + u\frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n+1} - f_{i,n-1}}{\Delta x^2}$$

шаблон имеет следующий вид:

Четырехточечный шаблон, трехслойная одношаговая схема.

Одношаговая – т.к. значение на *n+1* слое вычисляется за 1 шаг.

Здесь в правую часть входит искомое значение $f_{i,n+1}$.

Однако это уравнение можно явно разрешить относительно $f_{i,n+1}$

$$f_{i,n+1} = f_{i,n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}\right) - \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} f_{i,n+1}$$

$$f_{i,n+1} = \frac{f_{i,n-1} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right) + \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}\right)}{1 + \frac{2a\Delta x}{\Delta x^2}}$$

или

$$f_{i,n+1} = \left\lfloor f_{i,n-1} - c\left(f_{i+1,n} - f_{i-1,n}\right) + 2d\left(f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - f_{i,n-1}\right)\right\rfloor / \left(1 + 2d\right)$$

Для вычисления новых значений на *n+1* и *n* слое надо знать шаг на слое. Причем значения на слое вычисляется как некоторое приращение, а слой как бы перепрыгивает.

Отсюда и название “чехарда”.